



Mathematik Oberstufe - Hessen

Fit für die Qualifikationsphase?

Abiturvorbereitung Analysis - Teil 1



mathe.coach



 mathe.coach

The logo for 'mathe.coach' features a stylized green icon of a number 4 with a plus sign on either side, followed by the text 'mathe.coach' in a green sans-serif font.

Webseite zum Buch:
<https://mathe.coach/mgr1d>

Die Vervielfältigung dieses Buches oder von Teilen
daraus ist für Unterrichtszwecke erlaubt.

M. Huthmacher

Fit für die Qualifikationsphase?

Checkliste
Aufgaben
Lösungen
Formeln und Tipps

Letzte Überarbeitung:
04.08.2026



Inhalt

Vorwort	5
Für wen ist das Buch?	6
Checkliste	7
Aufgaben	18
Lösungen	28



Vorwort



Yea! Ein neues Übungsbuch für Mathe! Wer hat nicht darauf gewartet? (Wer Ironie erkennt, der liegt richtig).

Die Q1 (Klasse 12, G9, erstes Halbjahr) baut sehr stark auf der Einführungsphase (Klasse 11, G9) auf. Es ist deshalb gar nicht so selten, dass die Mathenote in der Q1 leidet.

Die erste Klausur läuft vielleicht noch gut, weil mit der Integralrechnung hauptsächlich neue Themen im Vordergrund stehen. Die zweite Klausur geht aber öfter mal schief, weil hier die letzten 1,5 Jahre in den Aufgaben verbunden werden. Die zweite Klausur ist bei vielen Lehrern auf Abiturniveau und beinhaltet häufig Aufgabenteile aus alten Abiturprüfungen.

Um Überraschungen zu vermeiden, habe ich in diesem Buch 15 Aufgaben zusammengestellt. Die Aufgaben bewegen sich auf mittleren Schwierigkeitsniveau und fragen die wichtigsten Inhalte ab. Wer diese Aufgaben lösen kann, der muss sich keine Sorgen machen. Sofern man nichts nachschlagen muss, kann man die Aufgaben in 4 bis 5 Stunden durcharbeiten.

Auf der Webseite zum Buch gibt es für jede Aufgabe ein Lösungsvideo, in dem ich die Lösung Schritt für Schritt zeige (Link auf Seite 2). Dort kann man auch die jeweils aktuelle Version des Buches herunterladen, in der Fehler korrigiert wurden.

Wer Fehler findet, Anmerkungen oder Verbesserungsvorschläge hat, kann mir schreiben: matthias@mathe.coach

Matthias Huthmacher

Für wen ist das Buch?

Dieses Buch ist für Schüler der Oberstufe in Hessen gedacht. Ihr könnt auf unterschiedliche Arten mit dem Buch arbeiten:

Schüler in der Q1: Ihr könnt das Buch verwenden um zu überprüfen, ob Ihr die wesentlichen Inhalte der E-Phase mitgenommen habt, die Ihr im weiteren Verlauf der Q1 benötigen werdet. Wenn Euer Halbjahr mit Integralrechnung gestartet ist, dann habt Ihr normalerweise Zeit bis nach den Herbstferien um die Aufgaben durchzuarbeiten und Stoff nachzuholen. Dann werdet Ihr das Wissen brauchen.

Schüler in der Q3: Vor dem Abitur stehen viele Schüler vor dem Problem: „Wo fange ich an! Das ist alles sooo vieeel!“. Dieses Problem löst das vorliegende Buch. Wenn Ihr die Aufgaben durcharbeitet, habt Ihr bereits einen guten Einstieg in die Abiturvorbereitung. Dann wiederholt Ihr noch die Integralrechnung und Kurvenscharen (nicht in diesem Buch enthalten) und beginnt im Anschluss mit dem Lösen alter Abituraufgaben aus der Analysis.

Schüler der E-Phase können das Buch begleitend zum Schuljahr nutzen und finden hier Übungen zur Vorbereitung auf die Klausuren.

Und schließlich ist das Buch eine wertvolle Hilfe für Schüler, die während der E-Phase im Ausland waren. Ihr könnt damit prüfen, ob Ihr alle relevanten Inhalte drauf habt.

Wenn Du wissen möchtest, an welchen Stellschrauben Du drehen kannst, um Deine Mathenote zu verbessern, dann ist das kostenlose online Seminar: „Wie werde ich besser in Mathe“ für Dich gedacht.

Informationen und Anmeldung unter:
<https://nachhelfer.org/besser-in-mathe/>



Checkliste E-Phase

Grundlagen

- ☐ Fit im Umgang mit Termen: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen, binomische Formeln, Potenzgesetze.
- ☐ Ich habe verstanden, was eine Funktion ist, und warum da x und y vorkommen.
- ☐ Ich kann eine Funktion in ein Koordinatensystem einzeichnen, wenn die Funktionsgleichung gegeben ist.
- ☐ Ich weiß, was mit den Begriffen „Stelle“, „Funktionswert“ und „Nullstelle“ gemeint ist.
- ☐ Ich kann rechnerisch prüfen, ob ein Punkt auf einem Funktionsgraphen liegt.
- ☐ Ich kann den Definitionsbereich einer Funktion angeben und weiß, was er bedeutet.
- ☐ Ich kann den Wertebereich einer Funktion ermitteln und weiß, was er bedeutet.

Checkliste E-Phase

Lineare Funktionen

- ☐ Gleichung einer linearen Funktion aufstellen, wenn
 - ein Punkt und die Steigung der Geraden gegeben sind,
 - zwei Punkte der Geraden gegeben sind,
 - ein Punkt und der Steigungswinkel der Geraden gegeben sind,
 - ein Graph einer Gerade gegeben ist.
- ☐ Graphen einer linearen Funktion mithilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen.
- ☐ Schnittpunkte von zwei linearen Funktionen berechnen.
- ☐ Steigungswinkel einer Geraden bestimmen.
- ☐ Schnittwinkel von zwei Geraden bestimmen.
- ☐ Prüfen, ob zwei Geraden orthogonal zueinander sind.
- ☐ Gleichung einer Geraden aufstellen, die orthogonal zu einer gegebenen Gerade ist und durch einen gegebenen Punkt verläuft.

Checkliste E-Phase

Quadratische Funktionen

- ☐ Ich weiß, was der Scheitelpunkt und die Nullstellen einer quadratischen Funktion sind.
- ☐ Funktionsgleichung umwandeln: Allgemeine Form, Scheitelpunktform, Darstellung in Linearfaktoren.
- ☐ Verschiebung, Streckung, Scheitelpunkt und Nullstellen aus der jeweils passenden Darstellungsform ablesen.
- ☐ Lage von Parabel und Gerade: Ist eine Gerade Sekante, Tangente oder Passante an einer Parabel?
- ☐ Schnittpunkte von Parabel und Gerade berechnen.

Potenzfunktionen

- ☐ Ich kenne den typischen Verlauf / typische Eigenschaften von Potenzfunktionen mit positiven geraden und ungeraden Exponenten.
- ☐ Ich kenne den typischen Verlauf / typische Eigenschaften von Potenzfunktionen mit negativen geraden und ungeraden Exponenten.
- ☐ Ich kenne den typischen Verlauf / typische Eigenschaften der Wurzelfunktion.
- ☐ Ich kann eine Wurzelfunktion in Potenzschreibweise angeben und umgekehrt.

Checkliste E-Phase

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

- ☐ Ich weiß, was eine ganzrationale Funktion ist.
- ☐ Ich weiß, was der Grad einer Funktion ist.
- ☐ Ich weiß, wie typische Funktionen vom 3. und 4. Grad aussehen.
- ☐ Nachweis der Standardsymmetrie einer Funktion.
- ☐ Verfahren zum Lösen von Gleichungen höherer Ordnung:
 - Funktion nach x auflösen durch Äquivalenzumformung.
 - Lösen von quadratischen Gleichungen mit der pq-Formel.
 - Lösen von Bi-quadratischen Gleichungen mithilfe der Substitution.
 - Lösen von Gleichungen durch Ausklammern (umwandeln in ein Produkt).
 - Lösen von Gleichungen mithilfe des Satzes vom Nullprodukt.
 - Lösen von Gleichungen mit dem Taschenrechner.

Grenzwerte von Funktionen

Vornehmlich für ganzrationale Funktionen

- ☐ Ich habe eine Vorstellung davon, was mit dem Begriff „Grenzwert“ gemeint ist.
- ☐ Grenzwertbestimmung $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$
- ☐ Grenzwertbestimmung $\lim_{x \rightarrow x_0}$
- ☐ Grenzwertbestimmung mit der h-Methode.

Checkliste E-Phase

Mittlere Steigung einer Funktion

Relevant für ganzrationale Funktionen, e-Funktionen und trigonometrische Funktionen.

- ☐ Ich weiß, was mit dem Begriff mittlere Steigung einer Funktion gemeint ist.
- ☐ Ich kann die mittlere Steigung einer Funktion für ein gegebenes Intervall berechnen.
- ☐ Ich kann aus dem Kontext einer Anwendungsaufgabe heraus erkennen, dass die mittlere Steigung gesucht ist.
- ☐ Interpretation der mittleren Steigung als mittlere Änderungsrate (z.b. Durchschnittsgeschwindigkeit, durchschnittliche Zuflussrate etc.).

Ableitung einer Funktion

Relevant für ganzrationale Funktionen, e-Funktionen und trigonometrische Funktionen.

- ☐ Ableitungsregeln für Potenzfunktionen und ganzrationale Funktionen.
- ☐ Ableitung von Funktionen mit der Produktregel.
- ☐ Ableitung von verketteten Funktionen mit der Kettenregel.
- ☐ Ableitung von zusammengesetzten Funktionen, bei denen man selbst erkennen muss, welche Regel für welchen Teil der Funktion zu verwenden ist.
- ☐ Bedeutung der ersten Ableitung kennen. Wozu benötigt man sie?
- ☐ Bedeutung der zweiten Ableitung kennen. Wozu benötigt man sie?

Checkliste E-Phase

Anwendung der Ableitung

Relevant für ganzrationale Funktionen, e-Funktionen und trigonometrische Funktionen.

- ☐ Graph einer Ableitung und Graph einer Funktion begründet zuordnen.
- ☐ Anhand eines gegebenen Funktionsgraphen die Ableitung grob skizzieren können.
- ☐ Unterschied zwischen mittlerer Steigung und lokaler Steigung kennen.
- ☐ Lokale Steigung in einem Punkt bestimmen und Stellen mit bestimmter Steigung finden.
- ☐ Interpretation der Steigung als Änderungsrate im Sachkontext (Geschwindigkeit, Durchflussrate, Gewinnänderung etc.).
- ☐ Tangentengleichung an einer gegebenen Stelle bestimmen.
- ☐ Normalengleichung an einer gegebenen Stelle bestimmen.
- ☐ Überprüfung, ob ein Schnittpunkt von zwei Funktionen eventuell ein Berührungspunkt ist.
- ☐ Bestimmung von Berührungspunkten zweier Funktionen.
- ☐ Steigungswinkel einer Funktion an einer Stelle berechnen.
- ☐ Schnittwinkel zweier Funktionen im Schnittpunkt berechnen.
- ☐ Monotonie einer Funktion untersuchen und die entsprechenden Intervalle bestimmen, in denen eine Funktion steigt oder fällt.
- ☐ Intervalle bestimmen, in denen eine Funktion links- oder rechtsgekrümmt ist.

Checkliste E-Phase

Kurvenuntersuchung

Relevant für ganzrationale Funktionen, e-Funktionen und trigonometrische Funktionen.

- ☐ Globalverlauf der Funktion bestimmen.
- ☐ Untersuchung auf Standardsymmetrie.
- ☐ Berechnen der Nullstellen.
- ☐ Berechnen der Extrempunkte.
- ☐ Berechnen der Wendepunkte und gegebenenfalls Sattelpunkte.
- ☐ Skizze des Graphen anhand der berechneten Ergebnisse erstellen.
- ☐ Kurvenuntersuchung im Sachkontext: Aus dem Aufgabentext herauslesen, welche Punkte oder Rechenschritte gefragt sind.

Checkliste E-Phase

Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben)

Relevant für ganzrationale Funktionen. in Q1 dann auch für andere Funktionstypen

- ☐ Lösungsschema: Hauptbedingung, Nebenbedingung, Zielfunktion kennen.
- ☐ Optimierungsaufgaben mit geometrischer Nebenbedingung (z.B. wie muss die Höhe der Dose gewählt werden, damit der Blechverbrauch minimal ist?)
- ☐ Optimierungsaufgaben mit funktionaler Nebenbedingung (z.B. wo muss ein Punkt auf der Funktion liegen, damit das entstehende Rechteck den maximalen Flächeninhalt hat?)

Rekonstruktion von Funktionen

Relevant für ganzrationale Funktionen. in Q1 dann auch für andere Funktionstypen

- ☐ Aus gegebenen Punkten, Nullstellen, Extrempunkten oder Wendepunkten ein lineares Gleichungssystem aufstellen.
- ☐ Aus einer Abbildung oder einer Anwendungsaufgabe die benötigten Informationen gewinnen, um ein lineares Gleichungssystem aufzustellen.
- ☐ Gleichungssystem mit zwei oder drei Variablen lösen.

Checkliste E-Phase

Exponentialfunktionen und e-Funktionen

- ☐ Ich kenne den Unterschied zwischen linearem und exponentiellem Wachstum und kann exponentielles Wachstum mithilfe des Quotiententests nachweisen.
- ☐ Ich kann aus einer Funktionsgleichung ablesen, ob ein Wachstumsprozess oder eine Abnahmeprozess gegeben ist und die prozentuale Zu- oder Abnahme ermitteln.
- ☐ Exponentialfunktion aufstellen können, wenn
 - der Anfangswert und der Wachstumsfaktor gegeben ist,
 - der Anfangswert und eine prozentuale Zu- oder Abnahme gegeben ist,
 - Der Anfangswert und ein Punkt auf dem Graphen gegeben ist,
 - Zwei Punkte des Graphen gegeben sind,
 - die oben genannten Informationen in einer Anwendungsaufgabe „versteckt“ sind.
- ☐ Ich kann mit dem Logarithmus umgehen und kenne die Logarithmengesetze.
- ☐ Ich kann Exponentialgleichungen mit dem Logarithmus lösen.
- ☐ ich kann die Halbwertszeit und die Verdoppelungszeit eines exponentiellen Prozesses ermitteln.
- ☐ Umwandeln einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = c \cdot a^x$ in die Form $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$
- ☐ Ableiten von Exponentialfunktionen zur Basis e mit Produkt- und Kettenregel.
- ☐ Kurvenuntersuchung mit Exponentialfunktionen zur Basis e.

Checkliste E-Phase

Trigonometrische Funktionen

- ☐ Winkel vom Gradmaß ins Bogenmaß umrechnen und umgekehrt.
- ☐ Ich habe die Zusammenhänge zwischen Einheitskreis und dem Graph der Sinus- und Kosinusfunktion verstanden.
- ☐ Die Parameter der Sinus und Kosinusfunktion kennen: Amplitude, Frequenz, Periodenlänge, Verschiebung in x und y Richtung.
- ☐ Eine Sinus- oder Kosinusfunktion zeichnen, in dem man die Parameter nutzt.
- ☐ Aus einem Graphen die Parameter bestimmen und so den Funktionsterm aufstellen.
- ☐ Lösen einfacher trigonometrischer Gleichungen.
- ☐ Ableitungen von trigonometrischen Funktionen (auch mit Produkt- und Kettenregel).
- ☐ Kurvenuntersuchung mit trigonometrischen Funktionen.
- ☐ Anwendungsaufgaben, bei denen aus dem Sachkontext eine passende Sinus- oder Kosinusfunktion gefunden (modelliert) werden muss.

Checkliste E-Phase

Nicht vergessen: Rechnen ohne Taschenrechner

Notwendig für den Hilfsmittel freien Teil von Klausuren und im Abitur

- ☐ Schriftlich addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren.
- ☐ Grundrechenarten mit Brüchen.
- ☐ Wichtige Brüche als Dezimalzahl im Kopf haben.
- ☐ Geübter Blick für die Teilbarkeit von Zahlen, um Brüche addieren oder kürzen zu können.
- ☐ Quadratzahlen von 1 bis 20 und die 25 auswendig können (notwendig, um zum Beispiel Tricks mit dem 3. Binom erkennen zu können oder um Wurzeln ziehen zu können).
- ☐ Kleines 1x1 im Kopf haben, Multiplikation bis 20x20 schnell im Kopf lösen können.

* Aufgabe 1
6 Minuten



Vereinfache die folgenden Terme und fasse so weit wie möglich zusammen.

a) $x^3 - 4x^2 + x - 1 - (-x^3 + 2x^2 + x + 2)$

b) $\frac{1}{2}x(x+2)(x-4)$

c) $-(4x-3) + 3(2x-1)^2$

*Erfolg heißt, von Fehler zu
Fehler zu springen und dabei
nicht den Mut zu verlieren.*

* Aufgabe 2

8 Minuten



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

- Bestimme den Funktionswert an der Stelle $x = 3$.
- Prüfe rechnerisch, ob der Punkt $P(-6|-48)$ auf dem Graphen der Funktion liegt.
- Zeichne den Graphen für $-4 \leq x \leq 4$.

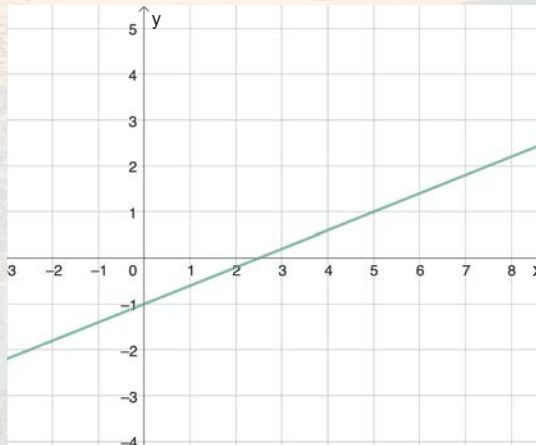
* Aufgabe 3

8 Minuten



Bestimme die Gleichung einer linearen Funktion mit den gegebenen Eigenschaften:

- Die Funktion geht durch den Punkt $A(3|-1)$ und hat die Steigung $m = -\frac{2}{3}$.
- Die Funktion geht durch die Punkte $A(4|0,5)$ und $B(-2|-1)$.
- Die Funktion schneidet die x-Achse bei 2 in einem Winkel von 45° .
- Die Funktion hat den folgenden Graphen:



Aufgabe 4
10 Minuten



Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2 \text{ und } g(x) = -\frac{1}{2}x + 3.$$

- Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Funktionen.
- Bestimme die Gleichung einer Geraden h , die orthogonal zur Geraden g verläuft und die Gerade f an der Stelle $x = 6$ schneidet.
- Zeichne die Geraden f , g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 5
8 Minuten



Der Graph einer quadratischen Funktion f ist um den Faktor $\frac{1}{4}$ in y -Richtung gestaucht und hat den Scheitelpunkt $S(4|-1)$.

- Gib die Funktionsgleichung der Parabel in der Scheitelpunktform und in der Polynomdarstellung (allgemeine Form) an.
- Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Funktionsgleichung in der Produktform an.
- Ist die Gerade mit der Gleichung $g(x) = x - 2$ eine Sekante, Tangente oder Passante an der Funktion f ?

Aufgabe 6
35 Minuten



Löse die folgenden Gleichungen:

a) $4x - 3 = -x + 2$

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$

c) $0,1x^4 - 1,7x^2 + 1,6 = 0$

d) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$

e) $x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 9x + 18) = 0$

f) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

g) $\frac{2}{3}x^3 - 2 = 2$

h) $x^3 - x^2 = 2x$

i) $5 \cdot 1,5^x = 25,3125$

j) $2 \cdot 1,2^x = 4 \cdot 0,7^x$

k) $(x + 2) \cdot e^{-0,3x+2} = 0$

l) $2e^{\frac{1}{4}x} + 3 = 15$

m) $3e^{-0,1x} = 5e^x$

n) $2\sin(4x) = 0$ für $0 \leq x \leq \pi$

Aufgabe 7
35 Minuten



Bestimme die erste Ableitung der Funktionen.

a) $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

b) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 6x$

c) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sin(x)$

f) $f(x) = \frac{2}{3}(x^2 - 4x)^5$

g) $f(x) = \sqrt{3x - 6}$

h) $f(x) = \frac{2}{3x^2 - 4x}$

i) $f(x) = e^{4x-2}$

j) $f(x) = 2e^{0,5x} + 4x$

k) $f(x) = -x \cdot e^x$

l) $f(x) = (40x + 25) \cdot e^{-0,25x+5}$

m) $f(x) = -4\cos(x^2 + 2x)$

n) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$

Aufgabe 8
40 Minuten



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

- a) Welchen Grad hat die Funktion?
- b) Bestimme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
- c) Untersuche die Funktion auf Standardsymmetrie.
- d) Weise rechnerisch nach, dass die Funktion bei $x_1 = 1$ die x-Achse berührt und bei $x_2 = 7$ die x-Achse schneidet.
- e) Berechne die mittlere Steigung der Funktion im Intervall $[2 ; 4]$.
- f) An welchen Stellen hat die Funktion die Steigung 9? Welchen Steigungswinkel hat die Funktion an diesen Stellen?
- g) Berechne die Extrempunkte der Funktion.
- h) Berechne den Wendepunkt der Funktion. Welche Steigung hat die Funktion im Wendepunkt?
- i) Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen im Wendepunkt.
- j) Skizziere den Graphen von f in einem Koordinatensystem in dem Du die Ergebnisse aus den Unteraufgaben a) bis i) verwendest.

**

Aufgabe 9

15 Minuten



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

- a) Ein Kapital von 1.000€ vermehrt sich jedes Jahr um 3%.
- b) Ein Auto mit einem Neuwert von 40.000€ verliert jedes Jahr 15% an Wert.
- c) Ein Anfangsbestand von 10 Bakterien verdreifacht sich alle zwei Stunden.
- d) Das Isotop Iod-131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Zu Beginn sind 25mg der Substanz vorhanden.
- e) Ein Aktie ist ein Jahr nach dem Kauf 129,60€ Wert und nach 12 Jahren 302,18€.

**

Aufgabe 10

10 Minuten



Der Wert eines schlechten Investments entwickelt sich nach der Funktion

$$f(x) = 15000 \cdot e^{-0,357x}$$

- a) Wie viel Geld wurde investiert?
- b) Wie hoch ist der prozentuale Wertverlust pro Jahr?
- c) Wann sind von dem Kapital nur noch 1.000€ übrig?

Ein zweites Investment läuft etwas besser, es entwickelt sich nach der Funktion $g(x) = 5000 \cdot e^{0,08x}$

- d) Wann sind beide Investments gleich viel Wert?

Aufgabe 11
30 Minuten



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$.

- a) Berechne die Nullstellen der Funktion.
- b) Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.
- c) Berechne den Extrempunkt und den Wendepunkt der Funktion.
- d) Bestimme die Gleichung der Wendetangente.
- e) Skizziere den Graphen der Funktion für $0 \leq x \leq 20$.

Aufgabe 12
20 Minuten



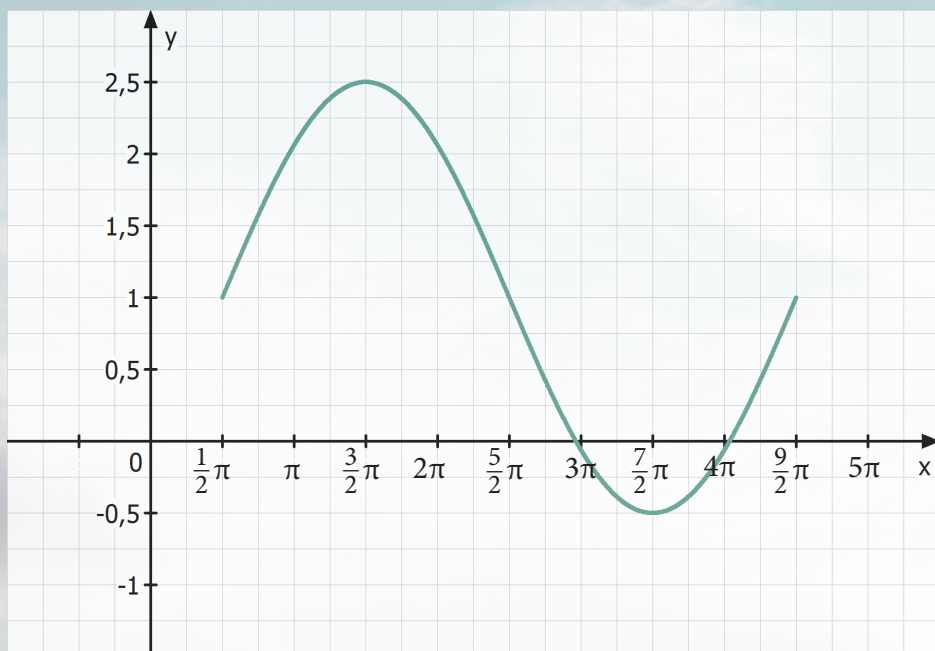
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$.

- a) Bestimme die Amplitude und die Periodenlänge der Funktion.
- b) Bestimme die Nullstellen der Funktion für $0 \leq x \leq 4$.
- c) Nutze Dein Wissen über den Verlauf der Sinusfunktion um mithilfe der Nullstellen die Extrempunkte der Funktion ohne Rechnung anzugeben.
- d) Zeichne den Graphen von f für $0 \leq x \leq 4$.
- e) Nimm Stellung zu der Aussage: „Jede Sinusfunktion hat Wendepunkte“.

Aufgabe 13
5 Minuten



Bestimme die Funktionsgleichung der abgebildeten Sinusfunktion.



Aufgabe 14
15 Minuten



Bestimme die Funktionsgleichung einer Funktion mit den gegebenen Eigenschaften.

- Eine quadratische Funktion hat Nullstellen bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$. Der y -Wert des Scheitelpunktes ist 2.
- Eine Funktion hat den Grad 3, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat einen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T(4|-2)$.

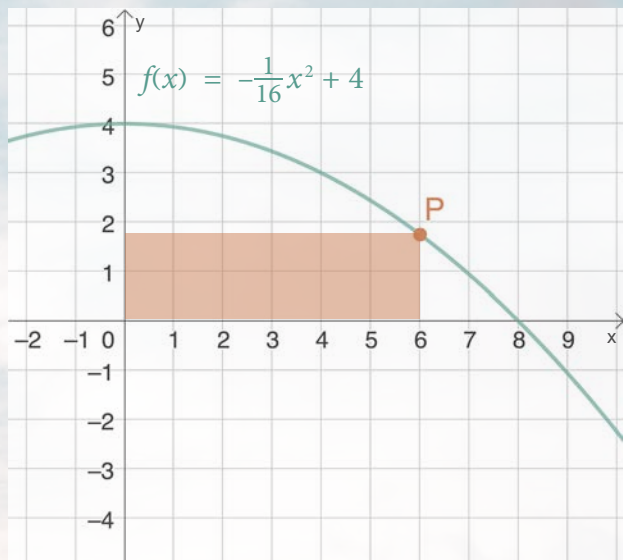
**

Aufgabe 15

15 Minuten



Wie muss der Punkt P gewählt werden, wenn die Fläche des Rechtecks maximal werden soll?



Lösung Aufgabe 1a



$$\begin{aligned}
 & x^3 - 4x^2 + x - 1 - (-x^3 + 2x^2 + x + 2) \\
 &= x^3 - 4x^2 + x - 1 + x^3 - 2x^2 - x - 2 \\
 &= x^3 - 4x^2 + x - 1 + x^3 - 2x^2 - x - 2 \\
 &= 2x^3 - 6x^2 - 3
 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 1b



$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}x(x+2)(x-4) \\
 &= \frac{1}{2}x(x \cdot x + x \cdot (-4) + 2 \cdot x + 2 \cdot (-4)) \\
 &= \frac{1}{2}x(x^2 - 4x + 2x - 8) \\
 &= \frac{1}{2}x \cdot x^2 + \frac{1}{2}x \cdot (-2x) + \frac{1}{2}x \cdot (-8) \\
 &= \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x
 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 1c



$$-(4x - 3) + 3(2x - 1)^2$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
 & (2x - 1)^2 \\
 &= (2x - 1) \cdot (2x - 1) \\
 &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-1) + (-1) \cdot 2x + (-1) \cdot (-1) \\
 &= 4x^2 - 2x - 2x + 1 \\
 &= 4x^2 - 4x + 1 \\
 &= -(4x - 3) + 3(4x^2 - 4x + 1) \\
 &= -(4x - 3) + 3(4x^2 - 4x + 1) \\
 &= -4x + 3 + 3 \cdot 4x^2 + 3 \cdot (-4x) + 3 \cdot 1 \\
 &= -4x + 3 + 12x^2 - 12x + 3 \\
 &= 12x^2 - 16x + 6
 \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 2a



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$. Bestimme den Funktionswert an der Stelle $x=3$.

Mit dem Begriff Stelle ist ein x -Wert gemeint, mit dem Begriff Funktionswert ist ein y -Wert gemeint.

Es soll also der y -Wert ausgerechnet werden, in dem man für x den Wert 3 in die Funktion einsetzt: $f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3 = -3$

Der gesuchte Funktionswert ist -3 .

Lösung Aufgabe 2b



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$. Prüfe rechnerisch, ob der Punkt $P(-6|-48)$ auf dem Graphen von f liegt.

Um rechnerisch zu prüfen, ob ein Punkt auf einem Graphen liegt, setzt man den x -Wert in die Funktion ein und schaut, ob der angegebene y -Wert rauskommt.

$$f(-6) = \frac{1}{3} \cdot (-6)^3 - 4 \cdot (-6) = -48$$

Der Punkt P liegt auf dem Graphen von f .

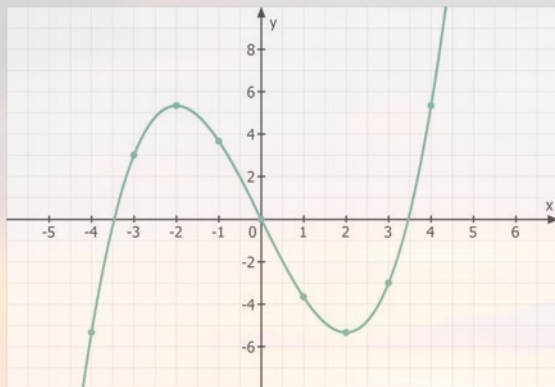
Lösung Aufgabe 2c



Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.
Zeichne den Graphen für $-4 \leq x \leq 4$.

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5,3	3	5,3	3,7	0	-3,7	-5,3	-3	5,3



Lösung Aufgabe 3a



Bestimme die Gleichung einer linearen Funktion mit den gegebenen Eigenschaften:

Die Funktion geht durch den Punkt $A(3|-1)$ und hat die Steigung $m = -\frac{2}{3}$.

Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet $y = m \cdot x + b$

Durch den Punkt ist ein **x-Wert** und ein **y-Wert** gegeben. Die Steigung m ist ebenfalls gegeben. Das setzt man alles in die allgemeine Funktionsgleichung ein und löst nach b auf.

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{2}{3} \cdot 3 + b \\ -1 &= -2 + b & | +2 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet
 $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

Lösung Aufgabe 3b



Bestimme die Gleichung einer linearen Funktion mit den gegebenen Eigenschaften: Die Funktion geht durch die Punkte $A(4|0,5)$ und $B(-2|-1)$.

Es sind zwei Punkte gegeben, damit kann die Steigung der linearen Funktion berechnen:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \begin{array}{cc} A(4|0,5) & B(-2|-1) \\ \nearrow \quad \nwarrow & \nearrow \quad \nwarrow \\ x_1 \quad y_1 & x_2 \quad y_2 \end{array} \longrightarrow m = \frac{-1 - 0,5}{-2 - 4} = \frac{1}{4}$$

Nun kann man einen der beiden Punkte, z.B. $A(4|0,5)$ und die Steigung $m = \frac{1}{4}$ in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet
 $y = m \cdot x + b$

$$0,5 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b$$

$$0,5 = 1 + b \quad | -1$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Lösung Aufgabe 3c



Bestimme die Gleichung einer linearen Funktion mit den gegebenen Eigenschaften: Die Funktion schneidet die x-Achse bei 2 in einem Winkel von 45°

In diesem Fall ist ein Punkt und die Steigung gegeben. Schnittpunkte mit der x-Achse haben den y-Wert 0. $\longrightarrow N(2|0)$

Einen Steigungswinkel kann man mit der Formel $m = \tan(\alpha)$ in eine Steigung umrechnen. $\longrightarrow m = \tan(45^\circ)$
 $m = 1$

Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet
 $y = m \cdot x + b$

Durch den Punkt ist ein x-Wert und ein y-Wert gegeben. Die Steigung m ist ebenfalls gegeben. Das setzt man alles in die allgemeine Funktionsgleichung ein und löst nach b auf.

$$0 = 1 \cdot 2 + b$$

$$0 = 2 + b \quad | -2$$

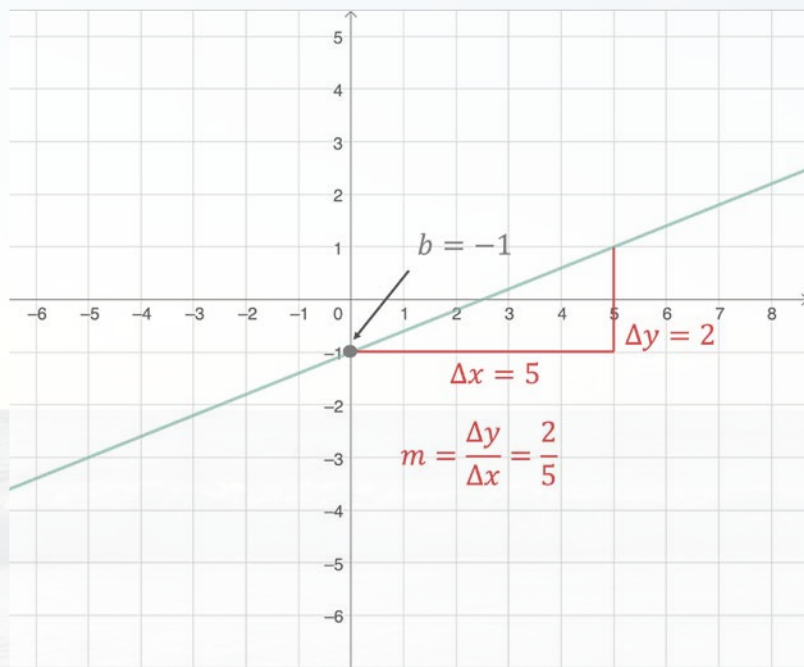
$$b = -2$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $f(x) = x - 2$

Lösung Aufgabe 3d



Bestimme die Gleichung einer linearen Funktion mit den gegebenen Eigenschaften: Die Funktion hat den folgenden Graphen:



Steigung und Schnittpunkt mit der y-Achse können aus der Skizze entnommen werden. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = \frac{2}{5}x - 1$$

Alternativ kann man aus der Skizze auch zwei Punkte ablesen, die auf der Geraden liegen und den Lösungsweg aus Aufgabe 3 b) verwenden.

Lösung Aufgabe 4a



Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Funktionen.

$$\begin{aligned}\text{Schnittpunkt: } f(x) &= g(x) & \frac{1}{3}x + 2 &= -\frac{1}{2}x + 3 & | -2 \\ & & \frac{1}{3}x &= -\frac{1}{2}x + 1 & | +\frac{1}{2}x \\ & & \frac{5}{6}x &= 1 & | : \frac{5}{6} \\ & & x &= \frac{6}{5} = 1,2\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt hat den x-Wert $\frac{6}{5}$. Um den y-Wert zu berechnen, setzt man den x-Wert entweder in $f(x)$ oder in $g(x)$ ein.

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} + 2 = \frac{12}{5} = 2,4 \longrightarrow S(1,2|2,4)$$

Den Schnittwinkel von zwei Geraden erhält man, in dem man den Steigungswinkel von jeder Geraden ausrechnet.

Steigungswinkel: $\alpha = \text{Arctan}(m)$

$$\begin{aligned}\text{Die Gerade } f \text{ hat die Steigung } m &= \frac{1}{3} & \alpha &= \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \\ & & \alpha &\approx 18,4^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Die Gerade } g \text{ hat die Steigung } m &= -\frac{1}{2} & \beta &= \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) \\ & & \beta &\approx -26,6^\circ\end{aligned}$$

Nun subtrahiert man die beiden Winkel so, dass ein positives Ergebnis entsteht: $\gamma = 18,4^\circ - (-26,6^\circ) = 45^\circ$

Die Geraden f und g schneiden sich im Punkt $S(1,2|2,4)$ in einem Winkel von 45° .

Lösung Aufgabe 4b



Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Bestimme die Gleichung einer Geraden h , die orthogonal zur Geraden g verläuft und die Gerade f an der Stelle $x = 6$ schneidet.

Die gesuchte Gerade h ist dann orthogonal zur Geraden g , wenn gilt: $m_g \cdot m_h = -1$

Die Gerade h hat die Steigung $m_h = -\frac{1}{m_g}$

Diese Steigung setzt man in die Formel ein und stellt um nach m_h .

$$-\frac{1}{2} \cdot m_h = -1 \quad | :(-\frac{1}{2})$$

$$m_h = 2$$

Die Gerade h hat die Steigung 2. Nun benötigt man noch einen Punkt, durch den die Gerade h gehen soll. Der ist indirekt gegeben: Die Gerade h soll die Gerade f an der Stelle $x = 6$ schneiden. Also setzt man 6 für x in die Funktion f ein.

$$f(6) = \frac{1}{3} \cdot 6 + 2 = 4 \longrightarrow P(6|4)$$

Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet

$$y = m \cdot x + b$$

Durch den Punkt ist ein x -Wert und ein y -Wert gegeben. Die Steigung m ist ebenfalls gegeben. Das setzt man alles in die allgemeine Funktionsgleichung ein und löst nach b auf.

$$4 = 2 \cdot 6 + b$$

$$4 = 12 + b \quad | -12$$

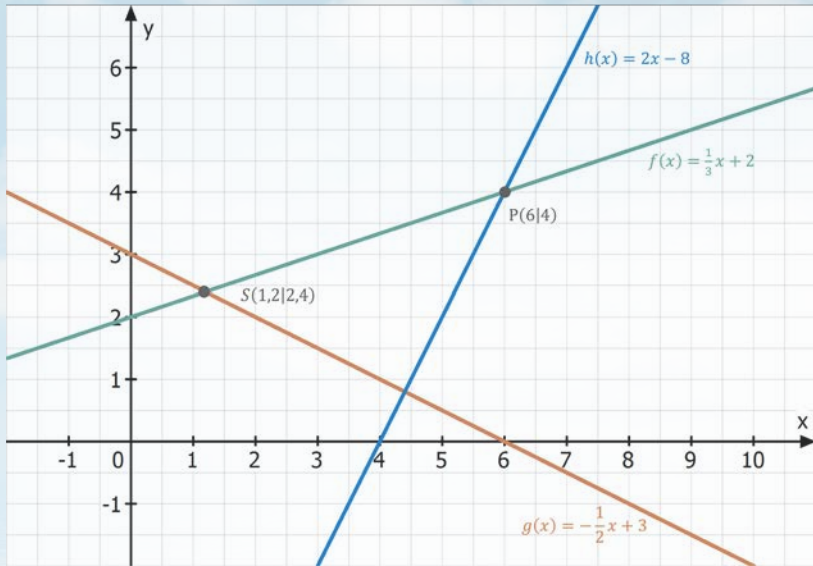
$$b = -8$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet $h(x) = 2x - 8$

Lösung Aufgabe 4c



Gegeben sind zwei Geraden mit den Gleichungen $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$. Zeichne die Geraden f , g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem.



Lösung Aufgabe 5a



Der Graph einer quadratischen Funktion f ist um den Faktor $\frac{1}{4}$ in y -Richtung gestaucht und hat den Scheitelpunkt $S(4|-1)$.

Gib die Funktionsgleichung der Parabel in der Scheitelpunktform und in der Polynomdarstellung (allgemeine Form) an.

Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Stauchung / Streckung x-Wert des Scheitelpunktes y-Wert des Scheitelpunktes

Alle erforderlichen Werte sind in der Aufgabe gegeben:

$$a = \frac{1}{4} \qquad x_s = 4 \qquad y_s = -1$$

Man erhält die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform, in dem man diese Werte einsetzt:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 - 1$$

Um die Scheitelpunktform in die allgemeine Form umzuwandeln, löst man die Klammer auf und fasst zusammen.

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 8x + 16) - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot (-8x) + \frac{1}{4} \cdot 16 - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$$

Nebenrechnung:

$$(x - 4)^2$$

$$= (x - 4) \cdot (x - 4)$$

$$= x \cdot x + x \cdot (-4) + (-4) \cdot x + (-4) \cdot (-4)$$

$$= x^2 - 4x - 4x + 16$$

Lösung Aufgabe 5b



Der Graph einer quadratischen Funktion f ist um den Faktor $\frac{1}{4}$ in y -Richtung gestaucht und hat den Scheitelpunkt $S(4|-1)$.

Berechne die Nullstellen der Funktion und gib die Funktionsgleichung in der Produktform an.

Um die Nullstellen zu berechnen, kann man die allgemeine Form oder die Scheitelpunktform verwenden.

Nullstellen mit der allgemeinen Form berechnen:

$$0 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 \quad |: \frac{1}{4}$$

$$0 = x^2 - 8x + 12$$

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12}$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = 4 \pm 2$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 6$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nullstellen mit Scheitelpunktform berechnen:

$$0 = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 - 1 \quad |+1$$

$$1 = \frac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 \quad |: \frac{1}{4}$$

$$4 = (x - 4)^2 \quad \text{Wurzel ziehen}$$

$$\pm 2 = x - 4$$

$$-2 = x - 4 \quad |+4$$

$$2 = x - 4 \quad |+4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 6$$

Lösung Aufgabe 5c



Ist die Gerade mit der Gleichung $g(x) = x - 2$ Sekante, Tangente oder Passante der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$?

Sekante: Schneidet den Graphen in zwei Punkten.

Tangente: Berührt den Graphen an genau einer Stelle.

Passante: Schneidet oder berührt den Graphen nicht.

Schnittpunkte von zwei Funktionen bestimmen: $f(x) = g(x)$

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = x - 2 \quad | +2$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 = x \quad | -x$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 3x + 5 = 0 \quad | : \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-12}{2}\right)^2 - 20}$$

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 20}$$

$$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = 6 \pm 4$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 10$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Es gibt zwei Lösungen, also schneidet die Gerade f die Funktion g in zwei Punkten und ist damit eine Sekante.

Lösung Aufgabe 6a



Löse die folgenden Gleichungen
für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcl} 4x - 3 = -x + 2 & | +3 \\ 4x = -x + 5 & | +x \\ 5x = 5 & | :5 \\ x = 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{1\}$$

Lösung Aufgabe 6b



Löse die folgenden Gleichungen
für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} &= 0 \\ x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ x_{1,2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4 + 5} \\ x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{9} \\ x_{1,2} &= 2 \pm 3 \\ x_1 &= -1 \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{-1; 5\}$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lösung Aufgabe 6c



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$0,1x^4 - 1,7x^2 + 1,6 = 0 \quad |:0,1$$
$$x^4 - 17x^2 + 16 = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$$z^2 - 17z + 16 = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{-17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2 - 16}$$

$$z_{1,2} = 8,5 \pm \sqrt{72,25 - 16}$$

$$z_{1,2} = 8,5 \pm \sqrt{56,25}$$

$$z_{1,2} = 8,5 \pm 7,5$$

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = 16$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Resubstitution:

$$x^2 = 1 \qquad \text{oder} \qquad x^2 = 16$$

$$x_1 = -1 \qquad x_3 = -4$$

$$x_2 = 1 \qquad x_4 = 4$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{-4; -1; 1; 4\}$$

Lösung Aufgabe 6d



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0$$

Satz vom Nullprodukt

$$x^2 = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_{2,3} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{0}$$

$$x_2 = -2$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{0; -2\}$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Lösung
Aufgabe 6e



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 9x + 18) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad | -1$$

$$x_2 = -1$$

$$x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$x_{3,4} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 18}$$

$$x_{3,4} = -4,5 \pm \sqrt{20,25 - 18}$$

$$x_{3,4} = -4,5 \pm \sqrt{2,25}$$

$$x_{3,4} = -4,5 \pm 1,5$$

$$x_3 = -6 \quad x_4 = -3$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{-6; -3; -1; 0\}$$

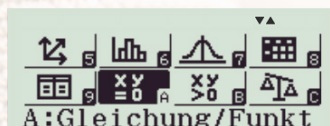
Lösung Aufgabe 6f



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Diese Gleichung kann mit den uns bekannten Rechenverfahren nicht gelöst werden, deshalb verwendet man die Taschenrechnerfunktion. Hier werden die Lösungsschritte für den Casio fx-991 DE X gezeigt.

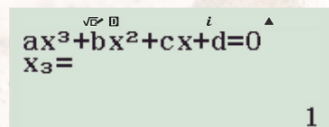
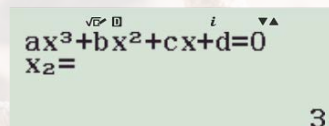
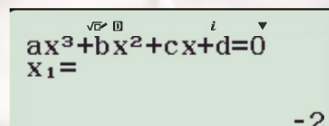
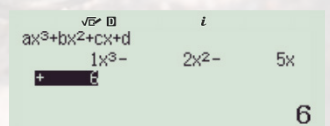
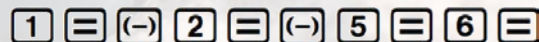
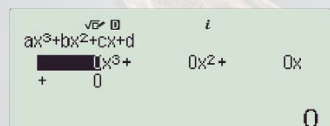


1: Gleichungssyst.
2: Polynom-Gleich.



Polynom-Gleich.
Grad?

2~4 wählen



$$\mathbb{L} = \{-2; 1; 3\}$$

Lösung
Aufgabe 6g



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2}{3}x^3 - 2 = 2 \quad | +2$$

$$\frac{2}{3}x^3 = 4 \quad | : \frac{2}{3}$$

$$x^3 = 6 \quad \text{dritte Wurzel ziehen}$$

$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1,82 \longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ \sqrt[3]{6} \right\}$$

Anmerkung: Diese Gleichung hat nur eine Lösung, da eine negative Zahl hoch drei nicht positiv wird.

Lösung
Aufgabe 6h



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$x^3 - x^2 = 2x \quad | -2x$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$$

$x_1 = 0$ $x^2 - 1x - 2 = 0$

$$x_{2,3} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)}$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} \quad x_3 = \frac{5}{4}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ -\frac{1}{4}, \frac{5}{4} \right\}$$

Lösung Aufgabe 6i



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$5 \cdot 1,5^x = 25,3125 \quad |:5$$

$$1,5^x = 5,0625 \quad ||\log$$

$$x = \log_{1,5}(5,0625)$$

$$x = 4 \longrightarrow \mathbb{L} = \{4\}$$

$$\log_{1,5}(5,0625)$$

4

Lösung Aufgabe 6j



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$2 \cdot 1,2^x = 4 \cdot 0,7^x \quad |:2$$

$$1,2^x = 2 \cdot 0,7^x \quad |:0,7^x$$

$$\frac{1,2^x}{0,7^x} = 2$$

$$\left(\frac{1,2}{0,7}\right)^x = 2$$

$$\left(\frac{12}{7}\right)^x = 2$$

$||\log$

$$\log_{\frac{12}{7}}(2)$$

$$x = \log_{\frac{12}{7}}(2) \approx 1,29$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{\log_{\frac{12}{7}}(2)\}$$

1,285995697

Lösung Aufgabe 6k



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$(x + 2) \cdot e^{-0,3x+2} = 0$$

$$\begin{aligned} x + 2 = 0 & \quad | -2 \\ x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-0,3x+2} = 0 & \quad | \ln \\ -0,3x + 2 = \ln(0) & \quad \text{⚡} \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$$

$\ln(0)$

Mathem. Fehler

[AC] : Abbrechen

[◀][▶]: Gehe zu

Lösung Aufgabe 6l



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$2e^{\frac{1}{4}x} + 3 = 15 \quad | -3$$

$$2e^{\frac{1}{4}x} = 12 \quad | :2$$

$$e^{\frac{1}{4}x} = 6 \quad | \ln$$

$$\frac{1}{4}x = \ln(6) \quad | : \frac{1}{4}$$

$$x = 4\ln(6) \approx 7,17$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \{4\ln(6)\}$$

Lösung
Aufgabe 6m



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$3e^{-0,1x} = 5e^x \quad |:3$$

$$e^{-0,1x} = \frac{5}{3}e^x \quad |:e^x$$

$$\frac{e^{-0,1x}}{e^x} = \frac{5}{3}$$

$$e^{-0,1x-x} = \frac{5}{3}$$

$$e^{-1,1x} = \frac{5}{3} \quad \ln$$

$$-1,1x = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \quad |:(-1,1)$$

$$x = -\frac{10}{11}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx -0,46$$

Potenzgesetz

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$\longrightarrow \mathbb{L} = \left\{ -\frac{10}{11}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \right\}$$

Lösung
Aufgabe 6n



Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$

$$2\sin(4x) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \pi$$

$$2\sin(4x) = 0 \quad |:2$$

$$\sin(4x) = 0$$

$$\text{Substitution: } 4x = z$$

$$\sin(z) = 0$$

$$\sin^{-1}(0) = z$$

$$z = 0$$

Resubstitution:

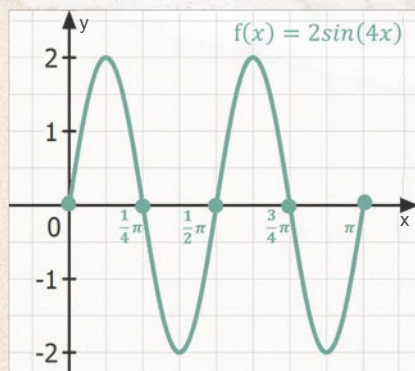
$$4x = 0 \quad |:4$$

$$x_1 = 0$$

Periodenlänge der Funktion:

$$P = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$$

Eine Sinusfunktion hat am Anfang, in der Mitte und am Ende der Periode eine Nullstelle (wenn sie nicht in y-Richtung verschoben ist). Die weiteren Nullstellen erhält man, in dem man die halbe Periodenlänge $\frac{1}{4}\pi$ addiert, bis man am Ende des angegebenen Intervalls ist.



$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$x_5 = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \pi$$

Lösung Aufgabe 7a



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = -\frac{4}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x + 1$$

$$= -4x^2 + x + 1$$

Lösung Aufgabe 7b



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2^3\sqrt{x} + 6x = 2x^{\frac{1}{3}} + 6x$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 6 = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 6$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} + 6 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + 6$$

Lösung Aufgabe 7c



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$$

$$f'(x) = 4 \cdot (-2)x^{-3}$$

$$f'(x) = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$$

Lösung Aufgabe 7d

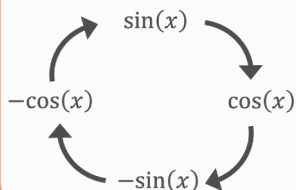


Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cos(x)$$

Ableitung von Sinus und Kosinus



Lösung Aufgabe 7e



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot \sin(x)$$

$$u(x) = \frac{1}{2} x \quad v(x) = \sin(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{2} \quad v'(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin(x) + \frac{1}{2} x \cdot \cos(x)$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Lösung Aufgabe 7f



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3} (x^2 - 4x)^5$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 5 (x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4)$$

$$f'(x) = \frac{10}{3} (x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4)$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung

Lösung
Aufgabe 7g



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{3x-6} = (3x-6)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x-6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2}(3x-6)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(3x-6)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x-6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal

innere Ableitung



Lösung Aufgabe 7h



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{2}{3x^2 - 4x} = \frac{2}{(3x^2 - 4x)^1} = 2 \cdot (3x^2 - 4x)^{-1}$$

$$f'(x) = -1 \cdot 2 \cdot (3x^2 - 4x)^{-2} \cdot (6x - 4)$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{(3x^2 - 4x)^2} \cdot (6x - 4) = \frac{-2 \cdot (6x - 4)}{(3x^2 - 4x)^2}$$

$$= \frac{-12x + 8}{(3x^2 - 4x)^2}$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal

innere Ableitung

Lösung Aufgabe 7i



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = e^{4x-2}$$

$$f'(x) = 4 \cdot e^{4x-2}$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal

innere Ableitung

Ableitung von

$$f(x) = a \cdot e^{g(x)}$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot a \cdot e^{g(x)}$$

dream

Lösung Aufgabe 7j



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = 2e^{0,5x} + 4x$$

$$f'(x) = 0,5 \cdot 2e^{0,5x} + 4 = e^{0,5x} + 4$$

Lösung Aufgabe 7k



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = -x \cdot e^x$$

$$u(x) = -x \quad v(x) = e^x$$

$$u'(x) = -1 \quad v'(x) = e^x$$

$$f'(x) = -1 \cdot e^x - x \cdot e^x$$

$$f'(x) = (-1 - x) \cdot e^x$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Lösung Aufgabe 71



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = (40x + 25) \cdot e^{-0,25x+5}$$

$$u(x) = (40x + 25) \quad v(x) = e^{-0,25x+5}$$

$$u'(x) = 40 \quad v'(x) = -0,25 \cdot e^{-0,25x+5}$$

$$f'(x) = 40 \cdot e^{-0,25x+5} + (40x + 25) \cdot (-0,25) \cdot e^{-0,25x+5}$$

$$f'(x) = 40 \cdot e^{-0,25x+5} - 10x \cdot e^{-0,25x+5} - 6,25 \cdot e^{-0,25x+5}$$

$$f'(x) = (40 - 10x - 6,25) \cdot e^{-0,25x+5}$$

$$f'(x) = (33,75 - 10x) \cdot e^{-0,25x+5}$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung

Lösung Aufgabe 7m



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

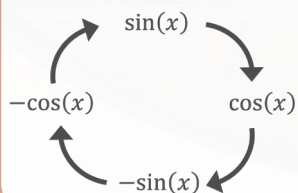
$$f(x) = -4\cos(x^2 + 2x)$$

$$f'(x) = -4 \cdot (-\sin(x^2 + 2x)) \cdot (2x + 2)$$

$$= 4 \cdot (2x + 2) \cdot \sin(x^2 + 2x)$$

$$= (8x + 8) \cdot \sin(x^2 + 2x)$$

Ableitung von Sinus und Kosinus



Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung

Lösung Aufgabe 7n



Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$$

$$u(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \quad v(x) = \cos\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$$

$$u'(x) = x + 1 \quad v'(x) = -\sin\left(\frac{1}{4}x - 2\right) \cdot \frac{1}{4} \\ = -\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung

$$f'(x) = (x + 1) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}x - 2\right)\right)$$

$$f'(x) = (x + 1) \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x - 2\right) + \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{4}x - 2\right)$$

Lösung Aufgabe 8a



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.
Welchen Grad hat die Funktion?

Die Funktion hat den Grad 3 (höchster Exponent, der im Funktions-term vorkommt).

Der Grad gibt an, wie viele Nullstellen eine Funktion haben kann.

Lösung Aufgabe 8b



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.
Bestimme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$

Für die Grenzwertbetrachtung ist nur $-x^3$ relevant.

$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3) = -\infty$ (Für positive x-Werte gehen die y-Werte gegen $-\infty$, d.h. geht man im Koordinatensystem nach rechts, läuft die Kurve nach unten.)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = \infty$ (Für negative x-Werte gehen die y-Werte gegen ∞ , d.h. geht man im Koordinatensystem nach links, läuft die Kurve nach oben.)



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.
Untersuche die Funktion auf Standardsymmetrie.

Standardsymmetrie

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$

Der Funktionsterm hat nur gerade Exponenten.

Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

Der Funktionsterm hat nur ungerade Exponenten.

Der Funktionsterm hat gerade und ungerade Exponenten, deshalb liegt keine Standardsymmetrie vor.

Rechnerischer Nachweis:

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^3 + 9(-x)^2 - 15(-x) + 7 \\ &= x^3 + 9x^2 + 15x + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(x) &= -(-x^3 + 9x^2 - 15x + 7) \\ &= x^3 - 9x^2 + 15x + 7 \end{aligned}$$

$$f(-x) \neq f(x) \quad \longrightarrow \text{Keine Achsensymmetrie zur y-Achse}$$

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \longrightarrow \text{Keine Punktsymmetrie zum Ursprung}$$

Lösung Aufgabe 8d



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

Weise rechnerisch nach, dass die Funktion bei $x_1 = 1$ die x-Achse berührt und bei $x_2 = 7$ die x-Achse schneidet.

Es geht um die Nullstellen der Funktion. Die Nullstellen der Funktion lassen sich hier nicht mit den bekannten Lösungsverfahren berechnen.

Man weiß jedoch, dass bei einer Nullstelle der y-Wert 0 ist. Also setzt man die x-Werte in die Funktion ein und zeigt, dass 0 rauskommt:

$$f(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 7 = 0$$

$$f(7) = -7^3 + 9 \cdot 7^2 - 15 \cdot 7 + 7 = 0$$

Damit ist nachgewiesen, dass die Funktion an den gegebenen Stellen die x-Achse schneidet. Es fehlt noch der Nachweis, dass die Funktion an der Stelle $x_1 = 1$ berührt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite



Berührungspunkte von Funktionen

Zwei Funktionen berühren sich, wenn gilt:

$$f(x) = g(x) \text{ und } f'(x) = g'(x)$$

Wenn zwei Funktionen sich berühren, dann haben sie im Berührungspunkt den gleichen y-Wert und die gleiche Steigung.

Dass der y-Wert an der Stelle $x_1 = 1$ gleich 0 ist, wurde bereits nachgewiesen.

Nun ist zu zeigen, dass die Funktion $x_1 = 1$ an der Stelle die gleiche Steigung hat wie die x-Achse.

Die Steigung der x-Achse ist 0.

Die Steigung an einer bestimmten Stelle kann man mit der ersten Ableitung einer Funktion berechnen.

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

Es ist zu zeigen, dass die Funktion f an der Stelle $x_1 = 1$ die Steigung 0 hat.

$$f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 15$$

$$= -3 + 18 - 15$$

$$= 0$$



Die Funktion f berührt an der Stelle $x_1 = 1$ die x-Achse weil gilt:

$$f(1) = 0 \text{ und } f'(1) = 0$$

Lösung Aufgabe 8e



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

Berechne die mittlere Steigung der Funktion im Intervall $[2 ; 4]$.

Mittlere Steigung einer Funktion

Die mittlere Steigung einer Funktion f im Intervall $[a ; b]$ berechnet man mit

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(a) = f(2) = -2^3 + 9 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 7 = 5$$

$$f(b) = f(4) = -4^3 + 9 \cdot 4^2 - 15 \cdot 4 + 7 = 27$$

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{27 - 5}{4 - 2} = 11$$

Die mittlere Steigung der Funktion f im Intervall $[2 ; 4]$ ist 11.

Lösung Aufgabe 8f



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

An welchen Stellen hat die Funktion die Steigung 9? Welchen Steigungswinkel hat die Funktion an diesen Stellen?

Gegeben ist die Steigung, gesucht sind die Stellen, also die x-Werte.

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

$$9 = -3x^2 + 18x - 15 \quad | +9$$

$$0 = -3x^2 + 18x - 24 \quad | :(-3)$$

$$0 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 4$$

Steigungswinkel berechnen:

$$\alpha = \arctan(9)$$

$$\alpha \approx 83,7^\circ$$

An den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ hat die Funktion die Steigung 9. Der Steigungswinkel an diesen Stellen beträgt ungefähr $83,7^\circ$.

Lokale Steigung einer Funktion

Die Steigung an einer Stelle einer Funktion bestimmt man mit der ersten Ableitung.

Steigung und Steigungswinkel

Eine Steigung kann in einen Steigungswinkel umgerechnet werden und umgekehrt.

$$m = \tan(\alpha)$$

$$\alpha = \arctan(m) \text{ oder } \alpha = \tan^{-1}(m)$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\tan^{-1}(9)$$

$$83,65980825$$

Bestimmung von Extrempunkten (Methode 1)

Schritt 1: Beantwortet die Frage nach dem WO

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$

Extrempunkte sind Punkte mit der Steigung 0. Die Steigung in einem Punkt berechnet man mit der ersten Ableitung. Deshalb berechnet man die Nullstellen der ersten Ableitung, um mögliche Extrempunkte zu finden.

Schritt 2: Beantwortet die Frage nach dem WAS

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte:

$f''(x) < 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Hochpunkt.

$f''(x) > 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Tiefpunkt.

Die Ergebnisse aus Schritt 1 setzt man in die zweite Ableitung ein.

Mit der zweiten Ableitung f'' einer Funktion bestimmt man die Krümmung der Kurve f . Dabei gilt: Ist der Wert der zweiten Ableitung negativ ($f''(x) < 0$), befindet man sich in einer Rechtskurve. Hochpunkte befinden sich immer in einer Rechtskurve. Ist der Wert der zweiten Ableitung positiv ($f''(x) > 0$), befindet man sich in einer Linkskurve. Tiefpunkte liegen immer in einer Linkskurve. Ist der Wert der zweiten Ableitung 0, so handelt es sich um einen möglichen Sattelpunkt.

Schritt 3: y-Werte berechnen.

Die x-Werte aus Schritt 1 setzt man in $f(x)$ ein, um die y-Werte zu bestimmen.

Bestimmung von Extrempunkten (Methode 2)

Schritt 1: Beantwortet die Frage nach dem WO

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$

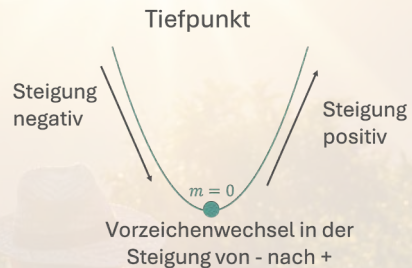
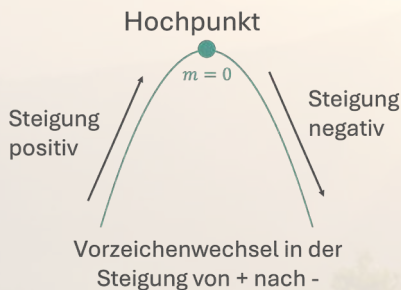
Schritt 2: Beantwortet die Frage nach dem WAS

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte:

Vorzeichenwechsel in der Steigung von + nach - $\longrightarrow$ Hochpunkt

Vorzeichenwechsel in der Steigung von - nach + $\longrightarrow$ Tiefpunkt

Man wählt x-Werte links und rechts vom möglichen Extrempunkt und berechnet die Steigung. Anhand des Vorzeichenwechsels kann man auf einen Hoch- oder Tiefpunkt schließen. Hat man keinen Vorzeichenwechsel, handelt es sich um einen möglichen Sattelpunkt.



Schritt 3: y-Werte berechnen.

Die x-Werte aus Schritt 1 setzt man in $f(x)$ ein, um die y-Werte zu bestimmen.

Lösung Aufgabe 8g Methode 1



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.
Berechne die Extrempunkte der Funktion.

Schritt 1 Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

$$0 = -3x^2 + 18x - 15 \quad | :(-3)$$

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Schritt 2 Hinreichende Bedingung:

$f''(x) < 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Hochpunkt.

$f''(x) > 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Tiefpunkt.

$$f''(x) = -6x + 18$$

$$f''(1) = -6 \cdot 1 + 18 = 12 > 0 \longrightarrow \text{Es handelt sich um einen Tiefpunkt}$$

$$f''(5) = -6 \cdot 5 + 18 = -12 < 0 \longrightarrow \text{Es handelt sich um einen Hochpunkt}$$

Schritt 3 y-Wert berechnen

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7.$$

$$f(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 7 = 0 \longrightarrow \text{Tiefpunkt bei } T(1|0)$$

$$f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 7 = 32 \longrightarrow \text{Hochpunkt bei } H(5|32)$$

Lösung Aufgabe 8g Methode 2



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

Berechne die Extrempunkte der Funktion.

Schritt 1 Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$$

$$0 = -3x^2 + 18x - 15 \quad | :(-3)$$

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

pq-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Schritt 2 Hinreichende Bedingung für Extrempunkte:

Vorzeichenwechsel in der Steigung von + nach - $\longrightarrow$ Hochpunkt

Vorzeichenwechsel in der Steigung von - nach + $\longrightarrow$ Tiefpunkt

x	0	1	2
$f'(x)$	-15	0	+9

Vorzeichenwechsel in der
Steigung von - nach +

$\longrightarrow$ Tiefpunkt bei $x_1 = 1$

x	4	5	6
$f'(x)$	+9	0	-15

Vorzeichenwechsel in der
Steigung von + nach -

$\longrightarrow$ Hochpunkt bei $x_2 = 5$

Schritt 3 y-Wert berechnen

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7.$$

$$f(1) = -1^3 + 9 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 7 = 0 \quad \longrightarrow \text{Tiefpunkt bei } T(1|0)$$

$$f(5) = -5^3 + 9 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 7 = 32 \quad \longrightarrow \text{Hochpunkt bei } H(5|32)$$

Bestimmung von Wendepunkten

Schritt 1: Beantwortet die Frage nach dem WO

Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

Wendepunkte sind Punkte, in denen die Steigung maximal ist (maximal positiv oder maximal negativ). Wendepunkte der Funktion f sind also lokale Hoch- oder Tiefpunkte der ersten Ableitung $f'(x)$.

Schritt 2: Beantwortet die Frage nach dem WAS

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte:

$f'''(x) < 0 \longrightarrow$ links/rechts Wendepunkt (positive Steigung)

$f'''(x) > 0 \longrightarrow$ rechts/links Wendepunkt (negative Steigung)

Die Ergebnisse aus Schritt 1 setzt man in die dritte Ableitung ein.

Mit der dritten Ableitung berechnet man die Krümmung der ersten Ableitung. Dabei gilt: Ist der Wert der dritten Ableitung negativ ($f'''(x) < 0$), ist $f'(x)$ rechtsgekrümmt und hat an dieser Stelle einen Hochpunkt. Daraus folgt, dass $f(x)$ an dieser Stelle die maximale positive Steigung hat. Das kann nur sein, wenn die Funktion von einem Tiefpunkt kommend (Linkskurve) auf einen Hochpunkt (Rechtskurve) zusteuert. Folglich handelt es sich dann um einen links/rechts Wendepunkt. Für rechts/links Wendepunkte verhält es sich entsprechend.

Schritt 3: y-Werte berechnen.

Die x-Werte aus Schritt 1 setzt man in $f(x)$ ein, um die y-Werte zu bestimmen.

Lösung Aufgabe 8h



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.
Berechne den Wendepunkt der Funktion. Welche Steigung hat die Funktion im Wendepunkt?

Schritt 1 Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = -6x + 18$$

$$0 = -6x + 18 \quad | +6x$$

$$6x = 18 \quad | :6$$

$$x = 3$$

Schritt 2 Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) < 0 \longrightarrow$ links/rechts Wendepunkt (positive Steigung)

$f'''(x) > 0 \longrightarrow$ rechts/links Wendepunkt (negative Steigung)

$$f'''(x) = -6$$

$$f'''(3) = -6 < 0 \longrightarrow \text{links/rechts Wendepunkt}$$

Schritt 3 y-Wert berechnen

$$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7.$$

$$f(3) = -3^3 + 9 \cdot 3^2 - 15 \cdot 3 + 7 = 16 \longrightarrow \text{l/r Wendepunkt bei } W(3|16)$$

Die Steigung in einem Punkt bestimmt man mit der ersten Ableitung. Man setzt also den x-Wert des Wendepunktes in die erste Ableitung ein: $f'(x) = -3x^2 + 18x - 15$

$$f'(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 15 = 12$$

Der Wendepunkt hat die Steigung 12.

Lösung Aufgabe 8i



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen im Wendepunkt.

Eine Tangente ist eine lineare Funktion mit der Grundgleichung
 $y = mx + b$

Um die Gleichung einer Tangente zu bestimmen, benötigt man einen Punkt und die Steigung in diesem Punkt. Hier hat man bereits beides: Den Wendepunkt und die Steigung im Wendepunkt (Aufgabe h)).

$$W(3|16) \quad f'(3) = 12 \quad \longrightarrow \quad m = 12$$

$$16 = 12 \cdot 3 + b$$

$$16 = 36 + b \quad | -36$$

$$b = -20$$

Die Tangentengleichung im Wendepunkt lautet $t(x) = 12x - 20$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Lösung Aufgabe 8i Fortsetzung



Eine Normale ist eine lineare Funktion mit der Grundgleichung

$$y = mx + b$$

Eine Normale schneidet die Tangente im Berührungspunkt und steht senkrecht auf der Tangente.

Der Berührungspunkt der Tangente ist der Wendepunkt: $W(3|16)$

Für die Normale gilt das Orthogonalitätskriterium: $m_t \cdot m_n = -1$

In diese Formel setzt man die Steigung der Tangente ein und stellt nach b um:

$$12 \cdot m_n = -1 \quad |:12$$

$$m_n = -\frac{1}{12}$$

Den Wendepunkt und die Steigung der Normalen setzt man in die Grundgleichung einer linearen Funktion ein und stellt nach b um.

$$y = mx + b$$

$$16 = -\frac{1}{12} \cdot 3 + b$$

$$16 = -\frac{1}{4} + b \quad | +\frac{1}{4}$$

$$b = \frac{65}{4}$$

Die Normalengleichung im Wendepunkt lautet $n(x) = -\frac{1}{12}x + \frac{65}{4}$.

Lösung Aufgabe 8j



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7$.

Skizziere den Graphen von f in einem Koordinatensystem, in dem Du die Ergebnisse aus den Unteraufgaben a) bis i) verwendest.

$$N_1(1|0)$$

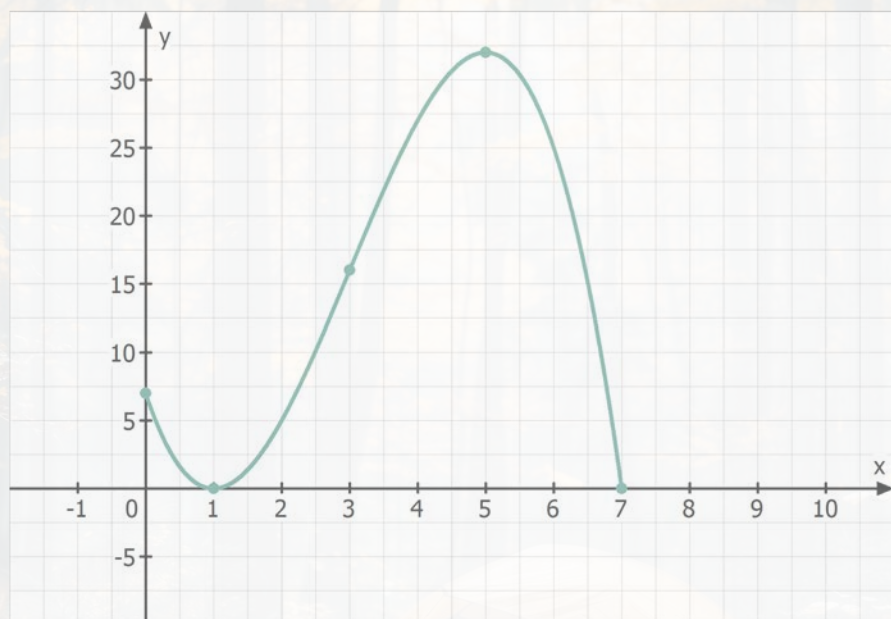
$$N_2(7|0)$$

$$S_y(0|7)$$

$$T(1|0)$$

$$H(5|32)$$

$$W(3|16)$$



Exponentielles Wachstum

$$f(x) = c \cdot a^x$$

Anfangsbestand Wachstumsfaktor

Für $a > 1$ handelt es sich um exponentielles Wachstum
Für $0 < a < 1$ (zwischen 0 und 1) handelt es sich um exponentielle Abnahme

Wenn in einer Aufgabe das Wachstum (oder die Abnahme) in Prozent angegeben ist, erhält man den Wachstumsfaktor a mit folgender Formel.

$$a = 1 + \frac{p}{100} \text{ für Wachstumsprozesse}$$

$$a = 1 - \frac{p}{100} \text{ für Abnahmeprozesse}$$

Lösung Aufgabe 9a



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

Ein Kapital von 1.000€ vermehrt sich jedes Jahr um 3%.

Anfangsbestand: $c = 1000$

Wachstumsfaktor: $a = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$

Funktionsgleichung: $f(x) = 1000 \cdot 1,03^x$

Lösung Aufgabe 9b



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

Ein Auto mit einem Neuwert von 40.000€ verliert jedes Jahr um 15% an Wert.

Anfangsbestand: $c = 40000$

Wachstumsfaktor: $a = 1 - \frac{15}{100} = 0,85$

Funktionsgleichung: $f(x) = 40000 \cdot 0,85^x$

Lösung Aufgabe 9c



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

Ein Anfangsbestand von 10 Bakterien verdreifacht sich alle zwei Stunden.

Anfangsbestand: $c = 10$

Wachstumsfaktor: $a = 3$ (Bestand verdreifacht sich)

Zwischenlösung: $f(x) = 10 \cdot 3^x$

Bei dieser Funktionsgleichung würde sich der Bestand jede Stunde verdoppeln. Er verdoppelt sich aber nur alle zwei Stunden, also halb so schnell.

Deshalb benötigt man einen Korrekturfaktor, der das x halbiert. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet dann:
 $f(x) = 10 \cdot 3^{\frac{1}{2}x}$

Exponentielles Wachstum (erweiterte Funktion)

$$f(x) = c \cdot a^{\frac{1}{2}x}$$

Anfangsbestand

Wachstumsfaktor

Zeitspanne, die ein Wachstum um den Faktor a benötigt.

Lösung
Aufgabe 9d



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

Das Isotop Iod-131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Zu Beginn sind 25mg der Substanz vorhanden.

Anfangsbestand: $c = 25$

Wachstumsfaktor: $a = \frac{1}{2}$ (Bestand halbiert sich)

Zeitspanne: $T = 8$ (es dauert 8 Tage, bis sich der Bestand einmal halbiert hat)

Funktionsgleichung: $f(x) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$

Lösung Aufgabe 9e



Ermittle eine Funktionsgleichung für die folgenden exponentiellen Prozesse:

Eine Aktie ist ein Jahr nach dem Kauf 129,60€ Wert und nach 12 Jahren 302,18€.

Hier sind zwei Punkte gegeben: $A(1|129,60)$ und $B(12|302,18)$

Diese Punkte setzt man in die Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ein.

$$I \quad 129,6 = c \cdot a^1$$

$$II \quad 302,18 = c \cdot a^{12}$$

Dieses Gleichungssystem löst man, in dem man die Gleichungen dividiert:

$$\begin{array}{l} I \quad 129,6 \\ II \quad 302,18 \end{array} = \frac{c \cdot a^1}{c \cdot a^{12}} \longrightarrow \begin{array}{l} 0,4289 \approx 1 \cdot a^{1-12} \\ 0,4289 \approx 1 \cdot a^{-11} \\ 0,4289 \approx a^{-11} \\ a \approx \sqrt[11]{0,4289} \approx 1,08 \end{array}$$

Um c zu berechnen, setzt man $a \approx 1,08$ in die Gleichung I oder II ein.

$$II \quad 302,18 = c \cdot 1,08^{12}$$

$$302,18 = c \cdot 2,518 \quad |:2,518$$

$$302,18 = c \cdot 2,518$$

$$c \approx 120,01$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = 120,01 \cdot 1,08^x$

An dieser Gleichung kann man ablesen, dass die Aktie für 120€ gekauft wurde und eine durchschnittliche Rendite von 8% erzielt hat.

Lösung
Aufgabe 10a



Der Wert eines schlechten Investments entwickelt sich nach der Funktion $f(x) = 15000 \cdot e^{-0,357x}$. Wie viel Geld wurde investiert?

Anfangsbestand: $c = 15000$

Es wurden 15.000€ investiert.

Lösung Aufgabe 10b



Der Wert eines schlechten Investments entwickelt sich nach der Funktion $f(x) = 15000 \cdot e^{-0,357x}$. Wie hoch ist der prozentuale Wertverlust pro Jahr?

Wachstumsfaktor: $a = e^{-0,357} \approx 0,7$

$$e^{-0,357} = 0,6997724977$$

$$0,7 \cdot 100 = 70$$

Nach einem Jahr sind noch 70% des Geldes vorhanden, d.h. der Wertverlust pro Jahr beträgt 30%.

Lösung Aufgabe 10c



Der Wert eines schlechten Investments entwickelt sich nach der Funktion $f(x) = 15000 \cdot e^{-0,357x}$. Wann sind vom Kapital nur noch 1.000€ übrig?

$$1000 = 15000 \cdot e^{-0,357x} \quad |:15000$$

$$\frac{1}{15} = e^{-0,357x} \quad |\ln$$

$$\ln\left(\frac{1}{15}\right) = -0,357x \quad |:(-0,357)$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,357} \approx 7,6$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{15}\right)}{-0,357} = 7,585574793$$

Nach etwa 7,6 Jahren hat sich das Kapital auf 1.000€ reduziert. (Natürlich würde kein Mensch sein Geld so lange in einem schlechten Depot lassen!).

Lösung Aufgabe 10d



Der Wert eines schlechten Investments entwickelt sich nach der Funktion $f(x) = 15000 \cdot e^{-0,357x}$. Ein zweites Investment läuft etwas besser, es entwickelt sich nach der Funktion $g(x) = 5000 \cdot e^{0,08x}$. Wann sind beide Investments gleich viel wert?

Gesucht ist der x-Wert des Schnittpunktes der beiden Funktionen: $f(x) = g(x)$

$$15000 \cdot e^{-0,357x} = 5000 \cdot e^{0,08x} \quad |:5000$$

$$3 \cdot e^{-0,357x} = e^{0,08x} \quad |:e^{-0,357x}$$

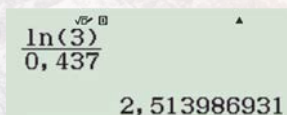
$$3 = \frac{e^{0,08x}}{e^{-0,357x}}$$

$$3 = e^{0,08x - (-0,357x)}$$

$$3 = e^{0,437x} \quad |\ln$$

$$\ln(3) = 0,437x \quad |:0,437$$

$$x = \frac{\ln(3)}{0,437} \approx 2,51$$



$\frac{\ln(3)}{0,437}$
2,513986931

Nach ca. 2,5 Jahren sind beide Investments gleich viel wert.

Lösung Aufgabe 11a



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Berechne die Nullstellen der Funktion.

An einer Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse. Der y-Wert ist deshalb 0. Ansatz: $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= (2x - 4) \cdot e^{-0,2x} \\ \swarrow \quad \quad \quad \nwarrow \\ 2x - 4 &= 0 \quad | +4 & \quad e^{-0,2x} &= 0 \quad | \ln \\ 2x &= 4 \quad | :2 & \quad -0,2x &= \ln(0) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ln(0)

Mathem. Fehler

[AC] :Abbrechen

[◀][▶]:Gehe zu

Die Funktion schneidet die x-Achse im Punkt $N(2|0)$.



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.

Erste Ableitung

$$f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$$

$$u(x) = (2x - 4)$$

$$v(x) = e^{-0,2x}$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = -0,2 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-0,2x} + (2x - 4) \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'(x) = 2 \cdot e^{-0,2x} - 0,4x \cdot e^{-0,2x} + 0,8 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'(x) = (2 - 0,4x + 0,8) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'(x) = (-0,4x + 2,8) \cdot e^{-0,2x}$$

Zweite Ableitung

$$f'(x) = (-0,4x + 2,8) \cdot e^{-0,2x}$$

$$u(x) = (-0,4x + 2,8) \quad v(x) = e^{-0,2x}$$

$$u'(x) = -0,4$$

$$v'(x) = -0,2 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = -0,4 \cdot e^{-0,2x} + (-0,4x + 2,8) \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = -0,4 \cdot e^{-0,2x} + 0,08x \cdot e^{-0,2x} - 0,56 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = (-0,4 + 0,08x - 0,56) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung



Fortsetzung auf der nächsten Seite

Lösung Aufgabe 11b Fortsetzung



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Bestimme die ersten drei Ableitungen der Funktion.

Dritte Ableitung

$$f''(x) = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

$$u(x) = (0,08x - 0,96) \quad v(x) = e^{-0,2x}$$

$$u'(x) = 0,08$$

$$v'(x) = -0,2 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = 0,08 \cdot e^{-0,2x} + (0,08x - 0,96) \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'''(x) = 0,08 \cdot e^{-0,2x} - 0,016x \cdot e^{-0,2x} + 0,192 \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'''(x) = (0,08 - 0,016x + 0,192) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'''(x) = (-0,016x + 0,272) \cdot e^{-0,2x}$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Kettenregel

Äußere Ableitung mal
innere Ableitung

Die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$ sind:

$$f'(x) = (-0,4x + 2,8) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(x) = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'''(x) = (-0,016x + 0,272) \cdot e^{-0,2x}$$

Lösung Aufgabe 11c



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Berechne den Extrempunkt und den Wendepunkt der Funktion.

Extrempunkt berechnen:

Schritt 1 Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = (-0,4x + 2,8) \cdot e^{-0,2x}$$

$$0 = (-0,4x + 2,8) \cdot e^{-0,2x}$$

$$-0,4x + 2,8 = 0 \quad | -2,8$$

$$e^{-0,2x} = 0 \quad | \ln$$

$$-0,4x = -2,8 \quad | :(-0,4)$$

$$-0,2x = \ln(0) \quad \text{⚡}$$

$$x = 7$$

$\ln(0)$

Mathem. Fehler

[AC] :Abbrechen
[◀][▶]:Gehe zu

Schritt 2 Hinreichende Bedingung:

$f''(x) < 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Hochpunkt.

$f''(x) > 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Tiefpunkt.

$$f''(x) = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f''(7) = (0,08 \cdot 7 - 0,96) \cdot e^{-0,2 \cdot 7} \approx -0,1 < 0 \longrightarrow \text{Hochpunkt}$$

Schritt 3 y-Wert berechnen

$$f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f(7) = (2 \cdot 7 - 4) \cdot e^{-0,2 \cdot 7} \approx 2,5 \longrightarrow \text{Hochpunkt bei } H(7|2,5)$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Lösung Aufgabe 11c Fortsetzung



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Berechne den Extrempunkt und den Wendepunkt der Funktion.

Wendepunkt bestimmen

Schritt 1 Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$f'(x) = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

$$0 = (0,08x - 0,96) \cdot e^{-0,2x}$$

$$0,08x - 0,96 = 0 \quad | +0,96$$

$$e^{-0,2x} = 0 \quad | \ln$$

$$0,08x = 0,96 \quad | :0,08$$

$$-0,2x = \ln(0) \quad \text{⚡}$$

$$x = 12$$

$\ln(0)$

Mathem. Fehler

[AC] : Abbrechen

[◀][▶]: Gehe zu

Schritt 2 Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) < 0 \longrightarrow$ links/rechts Wendepunkt (positive Steigung)

$f'''(x) > 0 \longrightarrow$ rechts/links Wendepunkt (negative Steigung)

$$f'''(x) = (-0,016x + 0,272) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f'''(12) = (-0,016 \cdot 12 + 0,272) \cdot e^{-0,2 \cdot 12} \approx 0,007 \longrightarrow \text{r/l Wendepunkt}$$

Schritt 3 y-Wert berechnen

$$f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$$

$$f(12) = (2 \cdot 12 - 4) \cdot e^{-0,2 \cdot 12} \approx 1,8 \longrightarrow \text{r/l Wendepunkt bei } W(12|1,8)$$

Lösung Aufgabe 11d



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Bestimme die Gleichung der Wendetangente.

Eine Tangente ist eine lineare Funktion mit der Grundgleichung
 $y = mx + b$

Um die Gleichung einer Tangente zu bestimmen, benötigt man einen Punkt und die Steigung in diesem Punkt. Den Wendepunkt hat man bereits, man benötigt noch die Steigung im Wendepunkt. Die kann man mit der ersten Ableitung berechnen:

$$f'(12) = (-0,4 \cdot 12 + 2,8) \cdot e^{-0,2 \cdot 12} \approx -0,18$$

$$W(12|1,8) \quad f'(12) = -0,18 \quad \longrightarrow \quad m = -0,18$$

$$1,8 = -0,18 \cdot 12 + b$$

$$1,8 = -2,16 + b \quad | +2,16$$

$$b = 3,96$$

Die Tangentengleichung im Wendepunkt lautet $t(x) = -0,18x + 3,96$.

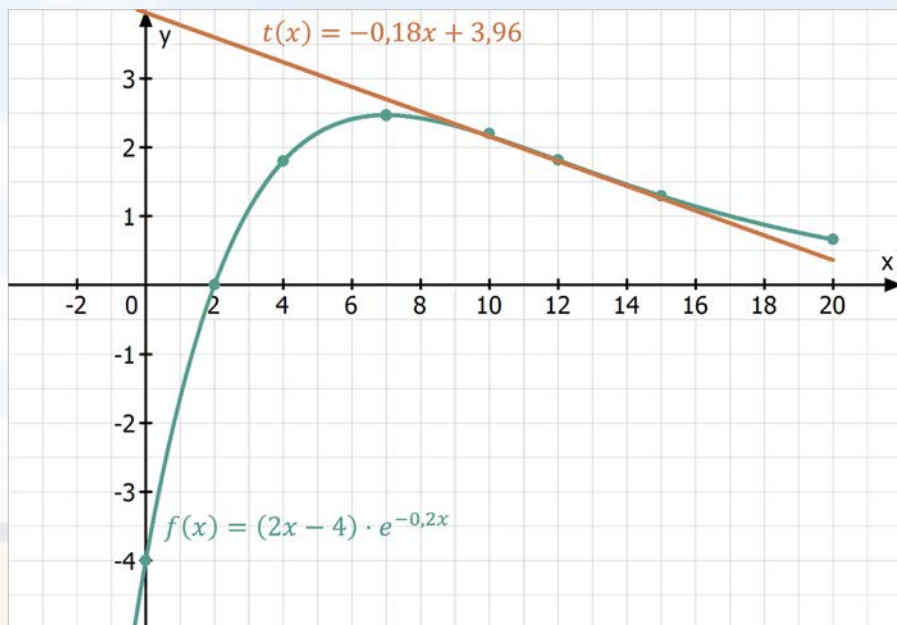
Lösung Aufgabe 11e



Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 4) \cdot e^{-0,2x}$. Skizziere den Graphen für $0 \leq x \leq 20$.

Wertetabelle:

x	0	2	4	7	10	12	15	20
y	-4	0	1,8	2,5	2,2	1,8	1,3	0,7



Lösung Aufgabe 12a



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$. Bestimme die Amplitude und die Periodenlänge der Funktion.

Die allgemeine Gleichung einer Sinusfunktion (und Kosinusfunktion) lautet:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

Amplitude Frequenz Verschiebung in x-Richtung Verschiebung in y-Richtung

Für die Periodenlänge einer Sinusfunktion (und Kosinusfunktion) gilt:

$$\text{Periodenlänge} = \frac{2\pi}{\text{Frequenz}}$$

$$\text{Periodenlänge berechnen: } P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 2 : \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{2}{1} = 4$$

Die Amplitude der Funktion f ist 2, die Periodenlänge beträgt 4.

Lösung Aufgabe 12b



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$. Bestimme die Nullstellen der Funktion für $0 \leq x \leq 4$.

Die Funktion f ist nicht verschoben und hat die Periodenlänge 4. Eine Sinusfunktion hat am Anfang, in der Mitte und am Ende der Periode eine Nullstelle (wenn sie nicht in y -Richtung verschoben ist, d.h. $d=0$ ist). Daraus kann man schließen, dass die Funktion Nullstellen hat bei: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 4$.

Rechnerischer Weg:

$$0 = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right) \quad |:2$$

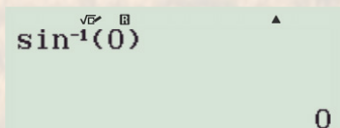
$$0 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$$

$$\text{Substitution: } z = \frac{1}{2}\pi \cdot x$$

$$0 = \sin(z)$$

$$\sin^{-1}(0) = z$$

$$z = 0$$



A calculator screen with a light green background. It displays $\sin^{-1}(0)$ in the top line and 0 in the bottom line. Above the top line, there are small icons for square root, pi, and a triangle.

Resubstitution:

$$\frac{1}{2}\pi \cdot x = 0 \quad |: \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0 + 2 = 2$$

$$x_3 = 2 + 2 = 4$$

Die Nullstellen x_2 und x_3 erhält man, in dem man die halbe Periodenlänge zu x_1 addiert, bis man am Ende des angegebenen Intervalls ist.

Lösung Aufgabe 12c



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$. Nutze Dein Wissen über den Verlauf der Sinusfunktion, um mithilfe der Nullstellen die Extrempunkte der Funktion ohne Rechnung anzugeben.

Die Funktion hat Nullstellen bei: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 4$.

Der Hochpunkt liegt in der Mitte der ersten beiden Nullstellen, also bei $x_H = 1$. Der Tiefpunkt der Funktion liegt in der Mitte der Nullstellen x_2 und x_3 , also bei $x_T = 3$. Als Formel ausgedrückt:

$$x_H = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_T = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

Ist die Funktion an der x-Achse gespiegelt (erkennt man an einem Minus vor der Funktion, dann ist es umgekehrt:

$$x_T = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_H = \frac{x_2 + x_3}{2}$$

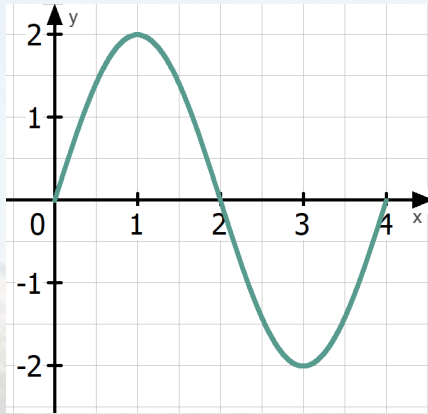
Die y-Werte von Hoch- und Tiefpunkt kann man aus der Amplitude erschließen. Die Amplitude der Funktion f ist 2. D. h. die Funktion schlägt um zwei nach oben und nach unten aus. Da die Funktion nicht in y-Richtung verschoben ist, hat der Hochpunkt den y-Wert 2 und der Tiefpunkt den y-Wert -2.

➡ $H(1|2)$ und $T(3|-2)$

Lösung
Aufgabe 12d



Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$. Zeichne den Graphen für $0 \leq x \leq 4$.



Lösung
Aufgabe 12e



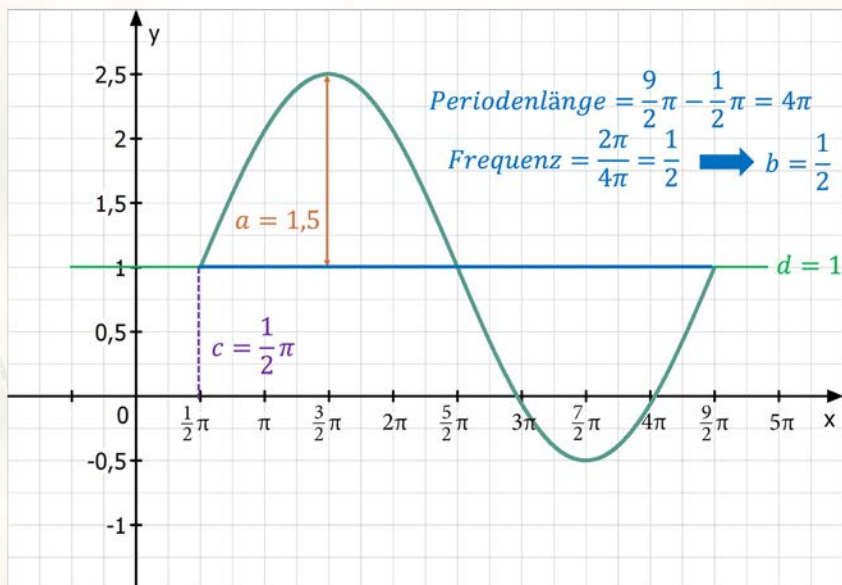
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot x\right)$. Nimm Stellung zu der Aussage: „Jede Sinusfunktion hat Wendepunkte“.

Jede Sinusfunktion hat Hoch- und Tiefpunkte. Hochpunkte liegen in einer Rechtskurve, Tiefpunkte liegen in einer Linkskurve. Zwischen Hoch- und Tiefpunkt muss also ein rechts/links Wendepunkt liegen. Zwischen Tiefpunkt und Hochpunkt muss ein links/rechts Wendepunkt liegen.

Fazit: Jede Sinusfunktion hat rechts/links und links/rechts Wendepunkte.



Bestimme die Funktionsgleichung der abgebildeten Sinusfunktion.



$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$$

Amplitude Frequenz Verschiebung in x-Richtung Verschiebung in y-Richtung

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) + 1$$



Bestimme die Funktionsgleichung einer Funktion mit den gegebenen Eigenschaften: Eine quadratische Funktion hat Nullstellen bei $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$. Der y -Wert des Scheitelpunktes ist 2.

Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt in der Mitte zwischen den Nullstellen, hier also bei $x = 0$. Damit hat man die Koordinaten des Scheitelpunktes: $S(0|2)$

Um die Funktionsgleichung aufzustellen, nimmt man eine der beiden Nullpunkte, z.B. $N(4|0)$ und setzt ihn zusammen mit dem Scheitelpunkt $S(0|2)$ in die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion ein:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

$$0 = a \cdot (4 - 0)^2 + 2$$

$$-2 = a \cdot 4^2$$

$$-2 = 16a \quad |:16$$

$$a = -\frac{1}{8}$$

Nun setzt man $a = -\frac{1}{8}$ und den Scheitelpunkt $S(0|2)$ in die Scheitelpunktform ein.

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x - 0)^2 + 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$$



Bestimme die Funktionsgleichung einer Funktion mit den gegebenen Eigenschaften: Eine Funktion hat den Grad 3, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat einen Tiefpunkt mit den Koordinaten $T(4|-2)$.

Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Punktsymmetrie zum Ursprung bedeutet, dass die Funktion nur ungerade Exponenten hat:

$$f(x) = ax^3 + b\cancel{x^2} + cx + \cancel{d}$$

$$f(x) = ax^3 + cx$$

Es müssen zwei Koeffizienten a und c bestimmt werden, d.h. man benötigt zwei Informationen über die Funktion. Beide Informationen stecken in der Angabe des Tiefpunktes:

Der Tiefpunkt $T(4|-2)$ liegt auf dem Graphen von $f \longrightarrow f(4) = -2$

In einem Tiefpunkt ist die Steigung 0 $\longrightarrow f'(4) = 0$

$$f(x) = ax^3 + cx$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

$$f(4) = -2 \longrightarrow -2 = a \cdot 4^3 + c \cdot 4 \longrightarrow -2 = 64a + 4c$$

$$f'(4) = 0 \longrightarrow 0 = 3a \cdot 4^2 + c \longrightarrow 0 = 48a + c$$

Nun hat man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Lösung Aufgabe 14b Fortsetzung



Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} I & -2 & = 64a + 4c \\ II & 0 & = 48a + c \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} I & -2 & = 64a + 4c \\ -4 \cdot II & 0 & = -192a - 4c \\ \hline I + (-4) \cdot II & -2 & = -128a \end{array}$$

$$-2 = -128a \quad | :(-128)$$

$$a = \frac{1}{64}$$

$a = \frac{1}{64}$ einsetzen in Gleichung I: $-2 = 64a + 4c$

$$-2 = 64 \cdot \frac{1}{64} + 4c$$

$$-2 = 1 + 4c \quad | -1$$

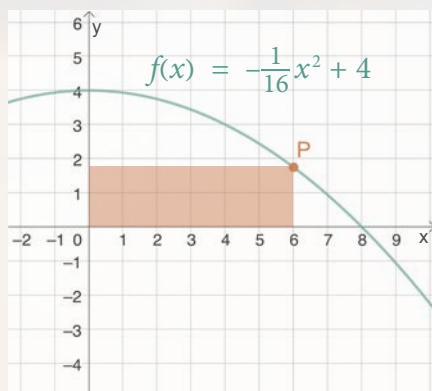
$$-3 = 4c \quad | :4$$

$$c = -\frac{3}{4}$$

Die gesuchte Funktion lautet $f(x) = \frac{1}{64}x^3 - \frac{3}{4}x$.



Wie muss der Punkt P gewählt werden, wenn die Fläche des Rechtecks maximal werden soll?



Hier handelt es sich um eine Optimierungsaufgabe, die man mit dem Lösungsschema Hauptbedingung, Nebenbedingung und Zielfunktion löst.

Hauptbedingung: Die Fläche eines Rechtecks soll maximal werden. Die x-Koordinate des Punktes P ist die Breite des Rechtecks. Die y-Koordinate des Punktes P ist die Höhe des Rechtecks: $A = x \cdot y$

Als Funktion geschrieben: $A(x, y) = x \cdot y$
(Die Fläche A ist abhängig von x und y).

Nebenbedingung: Der Punkt P soll auf der Funktion fliegen:
 $y = -\frac{1}{16}x^2 + 4$

Zielfunktion: Nun setzt man die Nebenbedingung in die Hauptbedingung ein:

$$A(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{16}x^2 + 4\right)$$

$$A(x) = -\frac{1}{16}x^3 + 4x$$

Diese Funktion liefert für jede beliebige Breite des Rechtecks (x) den dazugehörigen Flächeninhalt. Es ist die maximale Fläche des Rechtecks gesucht, also muss der Hochpunkt der Funktion bestimmt werden.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Lösung Aufgabe 15 Fortsetzung



Hochpunkt der Funktion $A(x) = -\frac{1}{16}x^3 + 4x$ bestimmen:

Notwendige Bedingung für Extrempunkte: $A'(x) = 0$

$$A'(x) = -\frac{3}{16}x^2 + 4$$

$$0 = -\frac{3}{16}x^2 + 4 \quad | +\frac{3}{16}x^2$$

$$\frac{3}{16}x^2 = 4 \quad | : \frac{3}{16}$$

$$x^2 = \frac{64}{3} \quad \text{Wurzel ziehen}$$

$$x_1 \approx 4,62 \quad x_2 \approx -4,62$$

Hinreichende Bedingung:

$f''(x) < 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Hochpunkt.

$f''(x) > 0 \longrightarrow$ Es handelt sich um einen Tiefpunkt.

$$A''(x) = -\frac{3}{8}x$$

$$A''(4,62) = -\frac{3}{8} \cdot 4,62 = -1,7325 < 0 \longrightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$A''(-4,62) = -\frac{3}{8} \cdot (-4,62) = 1,7325 > 0 \longrightarrow \text{Tiefpunkt}$$

Für $x \approx 4,62$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal. Um die Höhe des Rechtecks auszurechnen, setzt man den x-Wert in die Nebenbedingung ein:

$$y = -\frac{1}{16}x^2 + 4$$

$$y = -\frac{1}{16} \cdot 4,62^2 + 4 \approx 2,67$$

Für den Punkt $P(4,62|2,67)$ wird der Flächeninhalt des Rechtecks maximal.

A scenic view of a rocky beach. The foreground is filled with numerous large, reddish-brown, jagged rocks scattered across a sandy shore. The water is a vibrant turquoise color, meeting a clear blue sky with a few wispy white clouds. In the distance, there are green, hilly islands. On the right side, a small wooden pier or dock extends into the water, with a small building and lush green trees on the shore behind it.

Tschüs



mathe.coach